Θ. Rolle

1) Δίνεται $f(x)=x^2\cdot(1+\ln x)-3x-4\ln x$
ΝΔΟ $\exists\, \xi\in(1,2)$ ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $M(\xi, f(\xi))$ είναι $\parallel x'x$

ΛΥΣΗ

- f συνεχής στο $[1,2]$ και $f'(\xi)=0$ αφού $\varepsilon \parallel x'x$
- f παραγωγίσιμη στο $(1,2)$
- $f(1)=1\cdot(1+0)-3\cdot 1-4\ln 1=-2$

  $f(2)=4(1+\ln 2)-3\cdot 2-4\ln 2=4+4\ln 2-6-4\ln 2=-2$

Άρα, από Θ. Rolle $\exists\, \xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)=0 \Rightarrow$

$$\Rightarrow 2\xi(1+\ln\xi)+\xi-3-\frac{4}{\xi}=0$$

2) Δίνεται η $f(x)=\begin{cases} \alpha x^2-3x+1, & x<0 \\ x^2+\beta x-\gamma, & x\geq 0\end{cases}$ $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

για την οποία εφαρμόζεται το Θ. Rolle στο $\Delta[-1,1]$

α) Να βρείτε τα $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$

β) Να βρείτε το $x_0\in(-1,1)$ όπου η $f'(x_0)=0$

ΛΥΣΗ

α)
- Η f συνεχής στο $[-1,1]$ άρα η f συνεχής και στο 0

  Δηλαδή $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)=\lim\limits_{x\to 0} f(x)=f(0)$

$$\left.\begin{aligned} &\triangleright \lim_{x\to 0^+} f(x)=f(0)=-\gamma \\ &\triangleright \lim_{x\to 0^-} f(x)=\lim_{x\to 0^-} \alpha x^2-3x+1=1=f(0)\end{aligned}\right\}\ \text{Άρα } \gamma=-1$$

- Η f παραγωγίσιμη στο $(-1,1)$ άρα και στο 0

  Δηλαδή

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=f'(0)$$

$$\text{Άρα } \beta=-3 \quad \left\{\begin{aligned} &\triangleright \lim_{x\to 0^+}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\beta x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2+\beta x}{x}=\beta \\ &\triangleright \lim_{x\to 0^-}\frac{f(x)-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^2-3x+1-1}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{\alpha x^2-3x}{x}=-3\end{aligned}\right.$$

• $f(-1)=f(1) \Leftrightarrow \alpha+4 = 1-3+1 \Rightarrow \alpha=-3$

β) Άρα,

$$f(x)=\begin{cases} -5x^2-3x+1, & x<0 \\ x^2-3x+1, & x\geq 0 \end{cases}$$

Και

$$f'(x)=\begin{cases} -10x-3, & x<0 \\ 2x-3, & x\geq 0 \end{cases}$$

i. Στο $[-1,1]$ η f συνεχής
ii. Στο $(-1,1)$ η f παραγωγίσιμη
iii. $f(-1)=f(1)$

Άρα ισχύει το Rolle (δεδομένο)

Συνεπώς θα ισχύει και στα $\Delta_1[-1,0]$ και $\Delta_2[0,1]$

• Άρα, $\exists \xi_1 \in(-1,0)$: $f'(\xi_1)=0 \Rightarrow -10\xi_1-3=0 \Rightarrow \xi_1=-\frac{3}{10}$ Δεκτή

• Άρα, $\exists \xi_2 \in(0,1)$: $f'(\xi_2)=0 \Rightarrow 2\xi_2-3=0 \Rightarrow \xi_2=\frac{3}{2}>1$ Απορ.

Άρα, $\exists \xi_1 \in[-1,1]$ ώστε $f'(\xi_1)=0$ $\quad(\xi\equiv x_0)$

3) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ώστε $f(2)-f(1)=16$. ΝΔΟ $\exists \xi\in(1,2)$ ώστε $f'(\xi)=3\xi^2+6\xi$.

<u>ΛΥΣΗ</u>

$f'(x)=3x^2+6x \Rightarrow f'(x)-3x^2-6x=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow (f(x)-x^3-3x^2)'=0$

Θεωρώ $g(x)=f(x)-x^3-3x^2$

• g συνεχής $[1,2]$, • g παραγωγ. $(1,2)$
• $g(1)=f(1)-1-3=f(1)-4$
• $g(2)=f(2)-8-12=f(2)-20=f(1)+16-20=f(1)-4$

$g(1)=g(2) \Rightarrow$ Από Θ.Rolle $\exists \xi\in(1,2)$ ώστε $g'(\xi)=0 \Rightarrow$
$\Rightarrow f'(\xi)-3\xi^2-6\xi=0 \Rightarrow f'(\xi)=3\xi^2+6\xi.$

4) Δίνεται $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ δυο φορές παραγωγίσιμη οπου ισχυει $f(0)=f(1)=f(2)$. ΝΔΟ $\exists\, \xi \in (0,2)$: $f''(\xi)=0$

ΛΥΣΗ

Σπαω το $[0,2]$ σε $[0,1]$ και $[1,2]$

- Η f συνεχής $[0,1]$ (διοτι f παραγωγισιμη $\Rightarrow f$ συνεχής)
- Η f παραγωγ. $(0,1)$
- $f(0)=f(1)$

Αρα, απο Θ. Rolle $\exists\, \xi_1 \in (0,1)$: $f'(\xi_1)=0$

- Η f συνεχής $[1,2]$ (για τον ιδιο λογο)
- Η f παραγωγ. $(1,2)$
- $f(1)=f(2)$

Αρα, απο Θ. Rolle $\exists\, \xi_2 \in (1,2)$: $f'(\xi_2)=0$

Τελος στο διαστημα $[\xi_1,\xi_2]$ θα ποθμε οτι:

- Η f' συνεχής στο διαστημα $[\xi_1,\xi_2]$ (f δυο φορες παραγωγ.)
- Η f' παραγωγ. " " (ξ_1,ξ_2) (" " " ")
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Αρα, απο Θ. Rolle $\exists\, \xi \in (\xi_1,\xi_2) \subseteq (0,2)$: $f''(\xi)=0$

5) ΝΔΟ η εξίσωση $4x^3+3\lambda x^2+2(\lambda-2)x-2\lambda+1=0$, $\lambda\in\mathbb{R}$ εχει τουλαχιστον μια ρίζα στο $(0,1)$

ΛΥΣΗ

Προσοχη στην λυση της <u>δεν</u> πάμε με Θ. Bolzano (<u>δεν βγαινει</u>)
Αρα, παιρνω μια συναρτηση που θα'ναι η αρχική της $\varphi(x)=4x^3+3\lambda x^2+2(\lambda-2)x-2\lambda+1$ δηλαδή την Φ
οπου $\Phi(x)=x^4+\lambda x^3+(\lambda-2)x^2-(2\lambda+1)x$

- ▷ Φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πολυωνυμική, $\Phi(0)=\Phi(1)=0$
- ▷ Φ παραγωγ. στο $(0,1)$ " " Αρα απο Θ. Rolle θα

$\exists\, x_0 \in (0,1)$ ωστε $\Phi'(x_0)=0 \Rightarrow 4x_0^3+3\lambda x_0^2+2(\lambda-2)x_0-2\lambda+1=0$

6) Δίνεται η f συνεχής στο $[1,2]$ και παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ με $f(2)=2$ και $f(1)=1$. ΝΔΟ

α) $\exists\, \xi_1 \in (1,2)$ ώστε: $f'(\xi_1)(\xi_1-3) = -f(\xi_1)$

β) $\exists\, \xi_2 \in (1,2)$ ώστε: $f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{}$

γ) $\exists\, \xi_3 \in (1,2)$ ώστε: $f'(\xi_3)\cdot f(\xi_3)^{\xi_2} = \xi_3$

ΛΥΣΗ

α) $f'(x)\cdot(x-3) = -f(x) \Rightarrow f'(x)\cdot(x-3) + f(x)\,(x-3)' = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left((x-3)\cdot f(x)\right)' = 0$

Θεωρώ $g(x) = (x-3)\, f(x)$

- g συνεχής στο $[1,2]$ ως πράξεις συνεχών
- g παραγωγίσιμη στο $(1,2)$ ως πράξεις παραγωγίσιμων
- $g(1) = (1-3)\cdot f(1) = -2\cdot 1 = -2$

  $g(2) = (1-2)\cdot f(2) = -1\cdot 2 = -2$

Άρα, από Θ. Rolle, υπάρχει ένα $\xi_1 \in (1,2)$: $g'(\xi_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left((\xi_1-3)\cdot f(\xi)\right)' = 0 \Rightarrow f'(\xi_1)\cdot(\xi_1-3) = -f(\xi_1)$

β) $f'(x)\cdot x = f(x) \Rightarrow \frac{f'(x)\cdot x - f(x)\cdot(x)'}{x^2} = 0 \Rightarrow \left(\frac{f(x)}{x}\right)' = 0 \Rightarrow$

$g(x) = \frac{f(x)}{x}$

- g συνεχής στο $[1,2]$
- g παραγωγίσιμη στο $(1,2)$
- $g(1) = \frac{f(1)}{1} = 1$

  $g(2) = \frac{f(2)}{2} = 1$

Άρα, από Θ. Rolle, υπάρχει ένα $\xi_2 \in (1,2)$: $g'(\xi_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow \left(\frac{f(\xi_2)}{\xi_2}\right)' = 0 \Rightarrow f'(\xi_2) = \frac{f(\xi_2)}{\xi_2}$

γ) $f'(x)\cdot f(x) = x \Rightarrow f'(x)\cdot f(x) - x = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow 2f'(x)\cdot f(x) - 2x = 0 \Rightarrow \left(f^2(x) - x^2\right)' = 0$

Θέτω $g(x) = f^2(x) - x^2$

- g συν. $[1,2]$, • g παρ. $(1,2)$, • $g(1) = g(2) = 0$

Από Θ. Rolle $\exists\, \xi_3 \in (1,2)$: $g'(\xi_3) = 0 \Rightarrow f'(\xi_3)\cdot f(\xi_3) = \xi_3$

7) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου ισχύει $f(0) = e^6$ και $f(3) = e^{-3}$

Αν η f παραγωγίσιμη συνάρτηση. ΝΔΟ:

α) $\exists x_1 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε $f'(x_1) = -3f(x_1)$

β) $\exists x_2 \in (0,3)$ " " $f'(x_2) + 2x_2 f(x_2) = 0$

ΛΥΣΗ

α) $f'(x) = -3f(x_1) \Rightarrow f'(x) + 3f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x) + (3x)' \cdot f(x) = 0 \Rightarrow e^{3x} f'(x) + e^{3x} \cdot (3x)' f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (e^{3x} \cdot f(x))' = 0$

Θεωρώ, συνάρτηση $\varphi(x) = e^{3x} \cdot f(x)$

- φ συνεχής στο $[0,3]$ ως πράξεις συνεχών
- φ παραγωγίσιμη στο $(0,3)$ " " παραγωγίσιμων
- $\varphi(0) = f(0) = e^6$

  $\varphi(3) = e^9 \cdot f(3) = e^9 \cdot e^{-3} = e^6$

Άρα, από Θ. Rolle $\exists x_1 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε: $\varphi'(x_1) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_1) = -3f(x_1)$

β) $f'(x) + 2x \cdot f(x) = 0 \Rightarrow f'(x) + (x^2)' \cdot 2x f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow e^{x^2} f'(x) + e^{x^2} (x^2)' \cdot 2x f(x) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(x) \cdot e^{x^2})' = 0$

Θεωρώ, $g(x) = f(x) \cdot e^{x^2}$

- g συνεχής στο $[0,3]$
- g παραγωγ. στο $(0,3)$
- $g(0) = f(0) = e^6$

  $g(3) = f(3) \cdot e^9 = e^{-3} e^9 = e^6$

Άρα, από Θ. Rolle $\exists x_2 \in (0,3)$ τέτοιο ώστε: $g'(x_2) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(x_2) + 2x_2 \cdot f(x_2) = 0$

8) ΝΔΟ η εξίσωση $e^x+x^2=\alpha x+\beta$, με $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ έχει το πολύ δύο ρίζες.

ΛΥΣΗ

Έστω, ότι έχει τρεις ρίζες : $x_1<x_2<x_3$

- f συνεχής στο $[x_1,x_2]$ και $[x_2,x_3]$
- f παραγωγ. στο (x_1,x_2) και (x_2,x_3)
- $f(x_1)=f(x_2)$ και $f(x_2)=f(x_3)$

Άρα από Θ.Rolle $\exists\ \xi_1\in(x_1,x_2)$: $f'(\xi_1)=0$

" " " $\exists\ \xi_2\in(x_2,x_3)$: $f'(\xi_2)=0$

Έπειτα, παίρνουμε το $\Delta[\xi_1,\xi_2]$ και λέμε:

- Η f' συνεχής στο $[\xi_1,\xi_2]$ ως πράξεις συνεχών
- Η f' παραγωγίσιμη στο (ξ_1,ξ_2) ως πράξεις παραγωγίσιμων
- $f'(\xi_1)=f'(\xi_2)=0$

Άρα, από Θ.Rolle $\exists\ \xi\in(\xi_1,\xi_2)$ ώστε: $f''(\xi)=0$

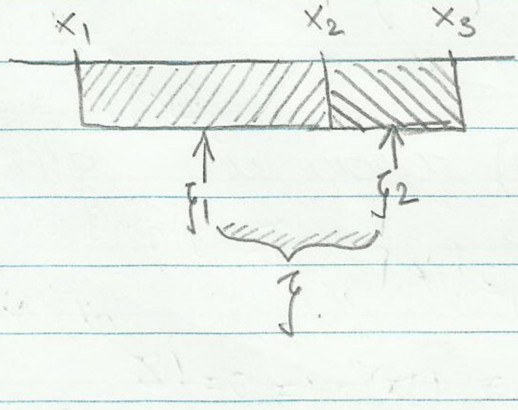
Αλλά, $(e^x+x^2)'=(\alpha x+\beta)'\Rightarrow e^x+2x=\alpha\Rightarrow$

$\Rightarrow(e^x+2x)'=(\alpha)'\Rightarrow e^x+2=0$

Και βρήκαμε $f''(\xi)=0\Rightarrow e^{\xi}+2=0$ Αδύνατη

Άρα, δεν μηδενίζεται στο ξ άρα δεν έχει 3η λύση

Επομένως, έχει 2 το πολύ λύσεις στο (ξ_1,ξ_2)



9) ΝΔΟ η εξίσωση $2x = ημx + 1$ έχει ακριβώς μια πραγματική ρίζα στο $(0, \frac{\pi}{2})$

ΛΥΣΗ

Θεωρούμε $f(x) = 2x - ημx - 1$

- f συνεχής στο $[0, \frac{\pi}{2}]$
- $f(0) = -1$ και $f(\frac{\pi}{2}) = \pi - 2 > 0$

Άρα, από Θ. Bolzano $\exists\, x_0 \in (0, \frac{\pi}{2}) : f(x_0) = 0 \Rightarrow 2x_0 = ημx_0 + 1$

$f'(x) = 2 - συνx$, πού μηδενίζεται η f' ;

$f'(x) = 0 \Rightarrow συνx = 2$ Αδύνατη $\forall x \in (0, \frac{\pi}{2})$

Άρα, η $f \searrow : (0, \frac{\pi}{2})$

Συνεπώς, η ρίζα θα ' ναι μοναδική

10) Δίνεται $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη όπου ισχύει

$f(1) - f(0) = 2$ και $f''(x) < 2$, $\forall x \in \mathbb{R}$

ΝΔΟ $\exists\, \xi \in (0,1)$ μοναδικό ώστε

$f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$.

ΛΥΣΗ

$f'(x) = 4x^3 + 2x \Rightarrow (f(x) - x^4 - x^2)' = 0$

Θέτω $\varphi(x) = f(x) - x^4 - x^2$

- Η φ συνεχής στο $[0,1]$ ως πράξεις συνεχών
- Η φ παραγωγ. στο $(0,1)$ -"- -"- παραγωγίσιμων
- $\varphi(0) = f(0)$

  $\varphi(1) = f(1) - 2 = f(0) + \cancel{2} - \cancel{2} = f(0)$

Άρα, από Θ. Rolle $\exists\, \xi \in (0,1)$ ώστε $\varphi'(\xi) = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow f'(\xi) = 4\xi^3 + 2\xi$

$\varphi''(x) = f''(x) - 12x^2 - 2 = f''(x) - 2 - 12x^2 < 0$

Άρα η $\varphi' \searrow$ στο $\mathbb{R}$ άρα η ξ μοναδική

11) Δίνεται παραγωγίσιμη $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ όπου ισχύει $f(1)=4$ και $f(2)=3$

ΝΔΟ α) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (1,2)$, ώστε $f(x_0)=x_0^2$

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi \in (1,2)$, ώστε $f(\xi)+\xi f'(\xi) = f'(\xi)+3\xi^2-2\xi$

ΛΥΣΗ

α) $f(x)=x^2 \Rightarrow f(x)-x^2=0$

Θέτω $g(x)=f(x)-x^2$

- g συνεχής στο $[1,2]$
- $g(1)=f(1)-1=4-1=3>0$

$g(2)=f(2)-4=3-4=-1<0$

Άρα, από Θ. Bolzano $\exists x_0 \in (1,2)$ ώστε: $g(x_0)=0$
$\Rightarrow f(x_0)=x_0^2$

β) $f(x)+x\cdot f'(x)=f'(x)+3x^2-2x$

$f(x)+x\cdot f'(x)-f(x) = 3x^2-2x$

$f(x)+f'(x)(x-1)=3x^2-2x$

$(x-1)'f(x)+f'(x)(x-1)=3x^2-2x$

$(f(x)\cdot(x-1))' = (x^3-x^2)'$

$f(x)\cdot(x-1)=x^3-x^2$

$f(x)(x-1)-x^3+x^2=0$

Θέτω $\varphi(x)=f(x)(x-1)-x^3+x^2$

- φ συνεχής στο $[1,x_0]$
- φ παραγωγ. στο $(1,x_0)$
- $\varphi(1)=\varphi(x_0)=0$

Άρα, Από Θ. Rolle $\exists \xi \in (1,x_0) \subseteq (1,2)$ τέτοιο ώστε:

$\varphi'(\xi)=0 \Rightarrow f(\xi)(\xi-1)-\xi^3+\xi^2=0 \Rightarrow$

$\Rightarrow (f(\xi)(\xi-1))' = (\xi^3-\xi^2)' \Rightarrow f(\xi)+\xi f'(\xi)=f'(\xi)+3\xi^2-2\xi$